Оценка глобальной размерности расслоенного произведения колец.

Н. В. Косматов

Пусть коммутативный квадрат колец и гомоморфизмов колец

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i_1} & R_1 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle i_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle j_1} \\ R_2 & \xrightarrow{j_2} & R' \end{array} \tag{1}$$

удовлетворяет условию: если для элементов $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$ выполнено $j_1(r_1) = j_2(r_2)$, то существует единственный элемент $r \in R$ такой, что $i_1(r) = r_1$, $i_2(r) = r_2$. В этом случае кольцо R называют расслоенным произведением колец R_1 и R_2 над R'. (Мы всюду рассматриваем ассоциативные кольца с единицей и, если не оговорено иначе, левые модули. Кроме того, все рассматриваемые гомоморфизмы колец переводят единицу кольца в единицу.) Проективные модули над R изучались Дж. Милнором в [1]. В 1988 г. в [2, т. 2] была опубликована следующая оценка левой глобальной размерности кольца R : если j_2 — сюръекция, то

$$\mathrm{l.gl.dim}\, R \leqslant \max_{k=1,2}\{\mathrm{l.gl.dim}\, R_k + \mathrm{r.fd}_R\, R_k\}, \tag{2}$$

где $\mathrm{r.fd}_R\, R_k$ обозначает плоскую размерность правого R-модуля R_k. В 1992 г. в [3, т. 1] для случая коммутативных колец в предположении сюръективности i_1 были получены более точные оценки $\mathrm{l.gl.dim}\, R$, а также показано, что в определенном смысле они являются самыми точными. Целью настоящей работы является обобщение этих оценок на некоммутативный случай. В качестве немедленного следствия 5 из основного результата — теоремы 4 — выводится оценка (2) при более слабом ограничении на квадрат (1).

Будем сохранять введенные обозначения. Сформулируем используемое далее следствие из [4, т. VII.1.1].

Лемма 1. *Пусть Λ — кольцо, $n \geqslant 1$, M — Λ-модуль с проективной размерностью $\mathrm{pd}_\Lambda\, M \leqslant n$, и пусть $\ldots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$ — проективная резольвента M с l-ой сизигией K_l (т. е. $K_l = \ker f_l$). Тогда для любого $l = 0, 1, \ldots, n-1$ $\mathrm{pd}_\Lambda\, K_l \leqslant n - l - 1$.*

Предложение 2. *Пусть* $n \geqslant 1$, M *—* R*-модуль, причем для любых* $k = 1, 2$ *и* $l = 0, 1, \dots, n$ $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_l^R(R_k, M)) \leqslant n - l$, *и пусть при всех* $t \geqslant 0$ $K_t = \ker f_t$ *—* t*-ая сизигия* M *в проективной резольвенте* M : $\dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$. *Тогда для любых* $k = 1, 2$ *и* $t = 0, 1, \dots, n-1$ $\mathrm{pd}_{R_k}(R_k \otimes_R K_t) \leqslant n - t - 1$.

Доказательство. При фиксированных $n \geqslant 1$ и $k = 1, 2$ проведем доказательство индукцией по t.

База индукции: $t = 0$. Т.к. $0 \longrightarrow K_0 \hookrightarrow P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$ — короткая точная последовательность в категории левых R-модулей R-Mod и R-модуль P_0 проективен, из длинной точной гомологической Tor-последовательности точна в R_k-Mod последовательность

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(R_k, M) \longrightarrow R_k \otimes_R K_0 \longrightarrow R_k \otimes_R P_0 \xrightarrow{1_{R_k} \otimes f_0} R_k \otimes_R M \longrightarrow 0.$$

Обозначим $I_{k,0} = \ker(1_{R_k} \otimes f_0)$. Т. к. $\mathrm{pd}_{R_k}(R_k \otimes_R M) \leqslant n$ по условию, а R_k-модуль $R_k \otimes_R P_0$ проективен, то $I_{k,0}$ — 0-ая сизигия R_k-модуля $R_k \otimes_R M$, и из леммы 1 получаем, что $\mathrm{pd}_{R_k}(I_{k,0}) \leqslant n - 1$. Далее, поскольку $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_1^R(R_k, M)) \leqslant n - 1$ по условию, $\mathrm{pd}_{R_k}(I_{k,0}) \leqslant n - 1$ и имеется короткая точная последовательность R_k-модулей

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(R_k, M) \longrightarrow R_k \otimes_R K_0 \longrightarrow I_{k,0} \longrightarrow 0,$$

получаем $\mathrm{pd}_{R_k}(R_k \otimes_R K_0) \leqslant n - 1$.

Индукционный переход. Пусть $1 \leqslant t \leqslant n - 1$ и для всех индексов $t' = 0, 1, \dots t - 1$ требуемое утверждение доказано. Применяя предыдущее рассуждение к короткой точной последовательности R-модулей $0 \longrightarrow K_t \hookrightarrow P_t \xrightarrow{f_t} K_{t-1} \longrightarrow 0$ и используя предположение индукции, получаем, что $\mathrm{pd}_{R_k}(R_k \otimes K_t) \leqslant n - t - 1$.

Предложение 3. *Пусть* i_1 *— сюръекция,* $n \geqslant 0$, M *—* R*-модуль, и пусть при всех* $k = 1, 2$ *и* $l = 0, 1, \dots, n$ $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_l^R(R_k, M)) \leqslant n - l$. *Тогда* $\mathrm{pd}_R(M) \leqslant n$.

Доказательство. Сначала разберем случай $n = 0$. По условию $\mathrm{pd}_{R_k}(R_k \otimes_R M) \leqslant 0$, т. е. $R_k \otimes_R M$ — проективный R_k-модуль, $k = 1, 2$. Следовательно, по теореме [5, т. 2.3] R-модуль M проективен. В случае $n \geqslant 1$ рассмотрим проективную резольвенту R-модуля M $\dots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$ и обозначим $K_l = \ker f_l$ для всех $l \geqslant 0$. Тогда по предложению 2 $\mathrm{pd}_{R_k}(R_k \otimes_R K_{n-1}) \leqslant 0$, и по теореме [5, т. 2.3] K_{n-1} — проективный R-модуль. Поэтому по [4, т. VII.1.1] $\mathrm{pd}_R(M) \leqslant n$.

Теорема 4. *Пусть* $n \geqslant 0$, i_1 *— сюръекция и для любого левого идеала* I *кольца* R *при всех* $k = 1, 2$ *и* $l = 0, 1, \dots, n$ $\mathrm{pd}_{R_k}(\mathrm{Tor}_l^R(R_k, R/I)) \leqslant n - l$. *Тогда* $\mathrm{l.gl.dim}\, R \leqslant n$.

Доказательство. Пусть I — левый идеал R. По условию и из предложения 3 $\operatorname{pd}_R(R/I) \leqslant n$. По теореме Ауслендера о глобальной размерности $\operatorname{l.gl.dim} R = \sup\{\operatorname{pd}_R(R/I) : I — \text{левый идеал } R\}$, поэтому $\operatorname{l.gl.dim} R \leqslant n$.

Следствие 5. *Если i_1 — сюръекция, то справедлива оценка (2).*

Доказательство. Для $k = 1, 2$ обозначим $n_k = \operatorname{l.gl.dim} R_k$, $m_k = \operatorname{r.fd}_R R_k$, $N_k = n_k + m_k$. Можно считать, что $m_k, n_k < \infty$. Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$ и зафиксируем $k \in \{1, 2\}$. Пусть I — левый идеал R, $M = R/I$. Т. к. $\operatorname{r.fd}_R R_k = m_k$, то $\operatorname{Tor}_l^R(R_k, M) = 0$ при всех $l \geqslant m_k + 1$. Поскольку $\operatorname{l.gl.dim} R_k = n_k$, при любом $l = 0, 1, \ldots, m_k$ имеем $\operatorname{pd}_{R_k}(\operatorname{Tor}_l^R(R_k, M)) \leqslant n_k \leqslant N_k - l \leqslant N - l$. Таким образом, для любого $l = 0, 1, \ldots, N$ $\operatorname{pd}_{R_k}(\operatorname{Tor}_l^R(R_k, M)) \leqslant N - l$, откуда по теореме 4 $\operatorname{l.gl.dim} R \leqslant N$.

В заключение автор выражает искреннюю признательность профессору А. И. Генералову, предложившему автору данную задачу и оказавшему большую помощь в работе над ней.

Список литературы

[1] Дж. Милнор. Введение в алгебраическую K-теорию. — М.: Мир, 1974.

[2] E. Kirkman, J. Kuzmanovich. On the global dimension of fibre products// Pacific J. Math. — 1988. — V. 134. — P. 121–132.

[3] S. Scrivanti. Homological dimension of pullbacks// Math. Scand. — 1992. — V. 71. — P. 5–15.

[4] С. Маклейн. Гомология. — М.: Мир, 1966.

[5] A. N. Wiseman. Projective modules over pullback rings// Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. — 1985. — V. 97. — P. 399–406.